

**СЕЛЕКЦИЯ ДВУМЕРНЫХ КОНВЕКТИВНЫХ СТРУКТУР В ПРИСУТСТВИИ
ИСПАРЕНИЯ И КАСАТЕЛЬНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ ВЕТРА**

Г.В. Рыбушкина, В.П. Реутов

Институт Прикладной Физики РАН, Нижний Новгород, Россия, 603950

ryb@sandy.ru

РЕЗЮМЕ

Численно исследуется селекция конвективных валов в тонком слое испаряющейся жидкости, обдуваемом воздушным потоком. Возникновение и развитие конвективных структур изучено для набора начальных и граничных условий. Показано, что при больших числах Рэлея в слое реализуется квазистационарная система валов, которая характеризуется медленными колебаниями их размеров во времени и вдоль цепочки. Получены зависимости среднего периода цепочки и дисперсии размера валов от времени и числа Рэлея. Проведено сравнение с известными экспериментальными данными.

ВВЕДЕНИЕ

Проблема отбора волновых чисел (периода конвективных валов) в двумерной конвекции остается актуальной несмотря на то, что в последние два десятилетия ей посвящено большое количество работ [1]. Остается неясным, в частности, ответ на вопрос, возможно ли в рамках двумерной теории правильно описать процесс отбора или для этого необходимо учитывать трехмерные эффекты [1]. В настоящей работе задача отбора решается для двумерной тепловой конвекции в тонком слое испаряющейся жидкости, обдуваемом воздушным потоком. При увеличении скорости воздушного потока в слое возникает система конвективных валов, вытянутых вдоль потока. Такая конвекция широко распространена в природных условиях (конвекция в присутствии «холодной пленки» на поверхности открытых водоемов [2]), а также наблюдается в экспериментах с испаряющимися жидкостями [3].

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим конвекцию в слое жидкости, обдуваемом воздушным потоком. Оси x, y, z декартовой системы координат направим соответственно вдоль воздушного потока, в трансверсальном направлении и вертикально вверх (против силы тяжести). Предположим, что в отсутствие возмущений ветровой поток создает внутри слоя $0 < z < H$ (H – глубина слоя) стационарное плоскопараллельное течение с профилем скорости $U(z)$. Рассмотрим конвективные движения с ориентацией осей валов в направлении оси x (продольные валы). Уравнения для жидкого слоя запишем в безразмерном виде через функцию тока ψ , завихренность Ω и смещенную температуру \mathcal{G} :

$$\frac{1}{\text{Pr}} \left(\frac{\partial \Omega}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial \Omega}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \Omega}{\partial z} \right) = -R \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial y} + \Delta \Omega, \quad \Delta \psi = \Omega,$$

$$\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial z} = \Delta \mathcal{G}, \quad (1)$$

$$\frac{1}{\text{Pr}} \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial z} \right) = \Delta u, \quad (2)$$

где $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$, $R = \frac{\alpha_0 g \delta T H^3}{\nu_0 \chi_0}$ – число Рэлея,

$\text{Pr} = \frac{\nu_0}{\chi_0}$ – число Прандтля (ν_0 – кинематическая

вязкость жидкости, χ_0 – коэффициент температуропроводности, α_0 – коэффициент теплового расширения, g – ускорение силы тяжести, δT – подходящий масштаб изменения

температуры). Вектор скорости течения $\vec{V} = (u, v, w)$, где $v = \partial\psi / \partial z$, $w = -\partial\psi / \partial y$, и соответственно $\Omega = -(\text{rot } \vec{V})_x$, $\mathcal{G} = (T - T_0) / \delta T$.

На нижней границе жидкого слоя $z=0$ поставим условия теплоизоляции, непротекания и прилипания

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial z} = 0 \end{aligned} \right|_{z=0} \quad (3)$$

Граничные условия на поверхности жидкости $z=1$ зададим в соответствии с результатами анализа, проведенного в работе [3]. Они включают в себя равенство нулю касательного напряжения и условие для температуры, определяемое балансом потоков тепла:

$$\Omega = 0, \quad \left. \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial z} = -b\mathcal{G} - 1 \right|_{z=1-0}, \quad b = s_V + s_T + s_R \quad (4)$$

где коэффициенты $s_{V,T,R}$ ответственны за температурную зависимость испарения, градиентную теплопередачу и нарушение радиационного баланса.

ЧИСЛЕННАЯ СХЕМА

Численная схема для расчета двумерного конвективного течения в жидком слое основывается на использовании процедуры дискретизации: замены непрерывных полей дискретными функциями в узлах равномерной сетки по координатам z и y . Производные по z и y заменялись в узлах сетки разностями второго порядка точности:

$$\frac{\partial^2 f_m}{\partial z^2} = \frac{f_{m+1} + f_{m-1} - 2f_m}{h^2}, \quad \frac{\partial f_m}{\partial z} = \frac{f_{m+1} - f_{m-1}}{2h}.$$

После этого, задача решалась спектральным методом: по координате y вводилось дискретное преобразование Фурье “по косинусам” (для температуры) и “по синусам” (для функции тока и завихренности). Решение системы (1) в узлах сетки с координатами (y_i, z_m) записывалось в виде

$$\psi_{i,m} = \sum_{n=1}^N A_{n,m}(t) \sin(nk_1 y_i), \quad \Omega_{i,m} = \sum_{n=1}^N K_{n,m}(t) \sin(nk_1 y_i),$$

$$\mathcal{G}_{i,m} = \bar{\mathcal{G}}(z_j, t) + \sum_{n=1}^N B_{n,m}(t) \cos(nk_1 y_i), \quad (5)$$

где $A_{n,m}, B_{n,m}, K_{n,m}$ – вещественные амплитуды гармоник с номером n на уровне z_m , k_1 – волновое число первой гармоники, N – число гармоник и узлов дискретизации по координате y . В силу симметрии в таком течении, очевидно, отсутствует средний дрейф в поперечном направлении y .

По существу в данном виде спектральный метод равносильно дискретному преобразованию Бубнова-Галеркина для области, на боковых границах которой поставлены условия непротекания и теплоизоляции (без наложения условия периодичности). Для вычисления нелинейных членов использована процедура быстрого дискретного преобразования Фурье. В отличие от численной модели, рассмотренной в [3], данная схема позволяет изучать более сложные конвективные течения (содержащие большое число различных вихрей) и решать задачу селекции пространственного периода конвективных структур.

Подстановка (5) в уравнения (1) приводит к эволюционной краевой задаче в обыкновенных производных по t для амплитуд гармоник и средней температуры с граничными условиями (3), (4). Уравнения в обыкновенных производных по t записывались для рабочих узлов сетки (y_i, z_m) с номерами $m=1, 2, \dots, M$. Значения переменных в крайних узлах $m=0, M+1$ определялись из граничных условий при $z=0$ и $z=1$. Большая система уравнений в обыкновенных производных интегрировалась методом RK4 с постоянным шагом. Уравнение Лапласа в (1) решалось методом дифференциальной прогонки. Основные расчеты проводились при $M=100$ и выборочно – при $M=200$. Число гармоник в большинстве расчетов составляло $N=128$ и волновое число первой гармоники выбиралось равным $k_1 = \pi/8$. Это, поперечному размеру расчетной области $d_y=8$, и шагу дискретизации $h_y=1/16$. В начальный момент задавался однородный поперек слоя профиль средней температуры $\bar{\mathcal{G}}=0$.

РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННЫХ РАСЧЕТОВ

С помощью описанной численной модели изучались особенности селекции двумерных конвективных структур в слое, параметры которого задавались применительно к условиям экспериментов с этанолом [3]. Расчеты показали, что при больших числах Рэлея возникает квазистационарная система валов (продольных вихрей), которая характеризуется медленными колебаниями размеров валов и модуляцией их периода вдоль цепочки. Количество вихрей и их размер оказались зависимыми от начальных условий. Если амплитуды всех гармоник в начальный момент полагались малыми, то результат отбора гармоник по волновому определялся динамикой системы. Если же в начальный момент превалировала гармоника с определенным волновым числом, то процесс отбора и его результат существенно изменялся. Таким образом, показано, что система обладает свойством мультистабильности, то есть имеет несколько устойчивых состояний.

Поведение основных гармоник осциллирующего конвективного течения для $Pr=16,6$, $R=60140$ и малых случайных начальных возмущений показано на рис. 1.

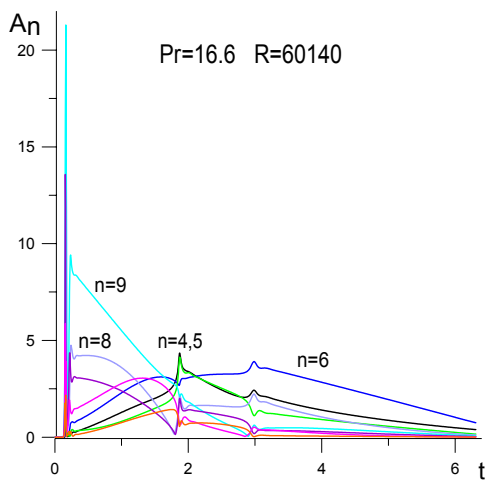


Рис.1

Зависимость амплитуд гармоник конвективного течения от времени.

Видно, что при переходе через порог возникновения неустойчивости возникает интенсивная генерация мелкомасштабных ($n=9$) конвективных движений (наличие пика генерации можно объяснить быстрым выходом системы в область большой надкритичности). В результате конкуренции масштаб конвективных вихрей

увеличивается, и в квазистационарном режиме при ($t \geq 3$) максимальный вклад в течение дает гармоника с $n=6$. С ростом времени амплитуды всех гармоник медленно спадают до нуля, и устанавливается однородный профиль температуры $\vartheta = -1/b$.

На рис. 2 изображены линии тока конвективных вихрей в различные моменты времени.

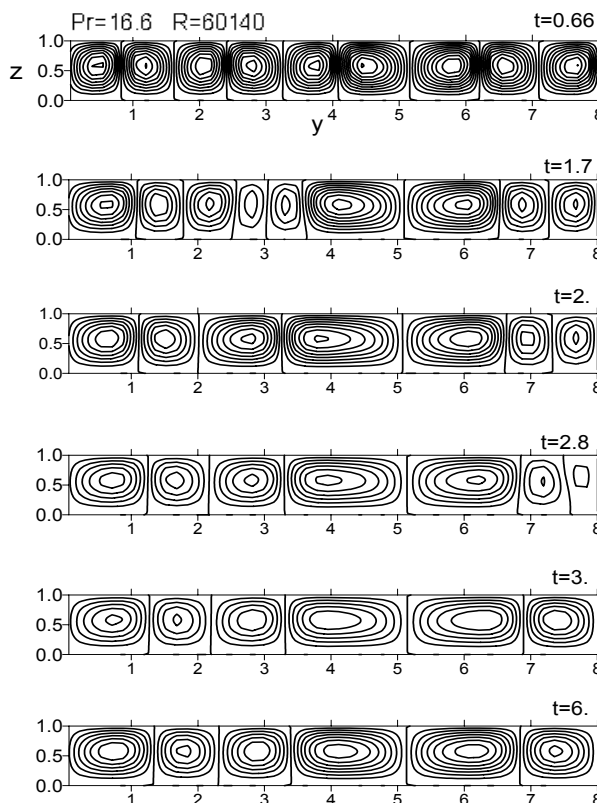


Рис.2

Цепочки конвективных вихрей в различные моменты времени.

Видно, что при малых начальных возмущениях в слое «выживает» квазипериодическая конвективная структура, в которой ширина вихря приблизительно равна глубине слоя, что хорошо соответствует результатам экспериментов с этанолом. По мере понижения температуры поверхности и общего охлаждения жидкости в слое число конвективных вихрей уменьшалось. В частности, сначала в рассмотренной области укладывалось 9 конвективных вихрей, затем их число становилось равным 7, а на стадии вырождения конвекции оставалось 6 вихрей (рис. 2).

Динамика размера конвективных вихрей во времени приведена на рис. 3. Общая тенденция заключается в увеличении размера вихрей, который сопровождается небольшими случайными пульсациями. Резкие изменения размеров связаны со скачкообразным уменьшением числа вихрей с 9 до 7 при $t \approx 2$ и с 7 до 6 при $t \approx 3$.

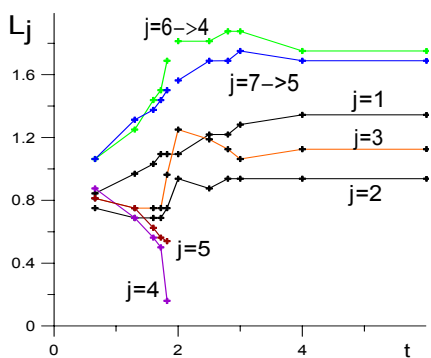


Рис.3
Зависимость размера j-го (от начала цепочки) вихря от времени.

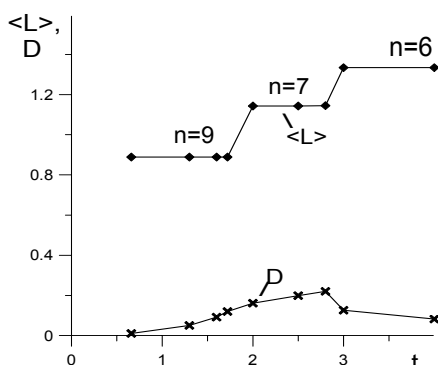


Рис.4
Зависимость среднего размера и дисперсии размеров вихрей в цепочке от времени.

На рис. 4 показана зависимость от времени среднего размера вихрей в цепочке и дисперсии размеров вихрей

$$\langle L \rangle = \sum_{j=1}^N L_j / N, \quad D = \langle L^2 \rangle - \langle L \rangle^2.$$

Максимальная относительная дисперсия невелика (не превышает 20 процентов), а масштаб временной модуляции (который фактически совпадает с характерным временем переключения режимов с различным числом вихрей) приблизительно равен одной трети временного интервала существования конвекции (рис.4).

На рис. 5(а) и 5(б) приведены картины вихрей,

полученные при изменении числа Рэлея. Сравнение цепочек вихрей на рис. 2 и 5 показывает, что практически на всех этапах эволюции вихрей их размер увеличивается с ростом числа Рэлея, что соответствует результатам экспериментов, приведенным в [1].

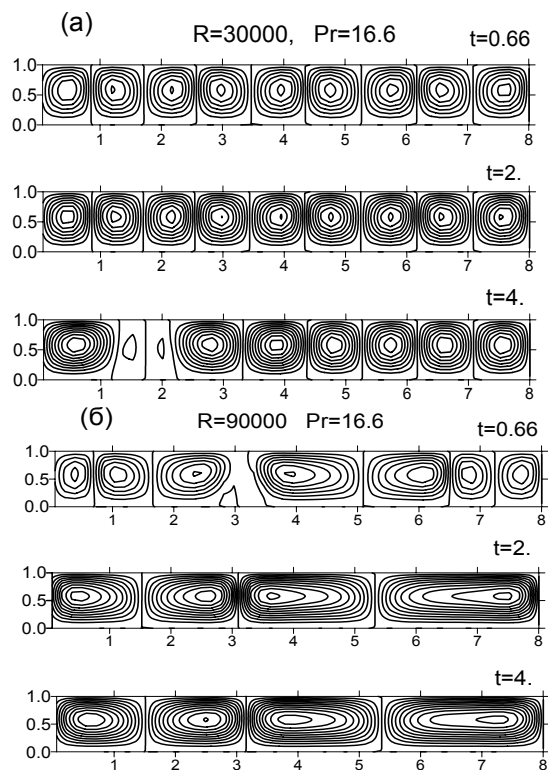


Рис.5
Цепочки конвективных вихрей при $R=30000$ (а) и $R=90000$ (б).

При задании интенсивного начального возмущения с определенным периодом поведение конвективной цепочки может отличаться от случая малых начальных возмущений. На рис. 6 показаны зависимости от времени амплитуд основных гармоник при задании интенсивных начальных амплитуд гармоник с $n=9$ (а) и $n=4$ (б), а на рис. 7(а, б) соответственно цепочки квазистационарных вихрей при $t=4$. В первом случае в результате отбора выживает заданная изначально 9-я гармоника, а во втором случае период возмущения уменьшается вдвое и выживает 8-я гармоника. Видно, что в обоих случаях установившийся характерный размер вихрей близок к толщине слоя, но в (а) реализуется цепочка из 9 вихрей, а в (б) - цепочка из 8 вихрей (в отличие от 6 вихрей на рис.2).

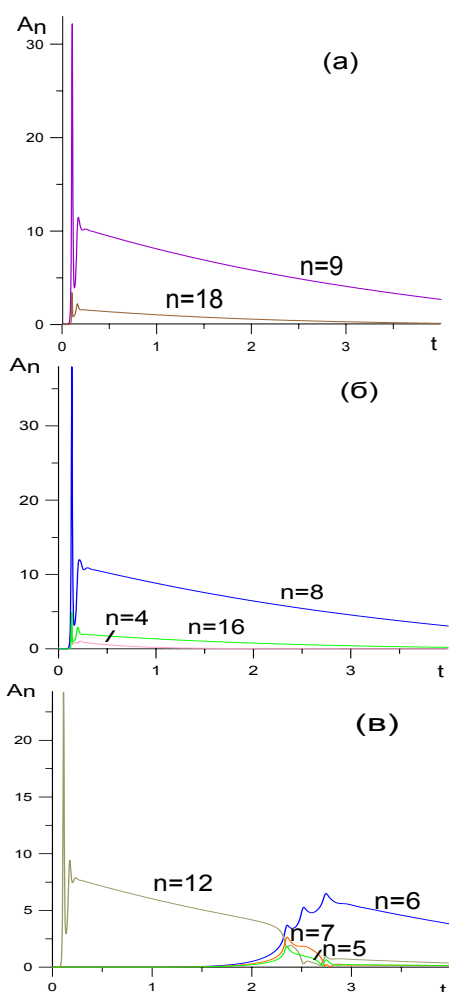


Рис.6

Зависимость амплитуд основных гармоник от времени при интенсивных начальных возмущениях.

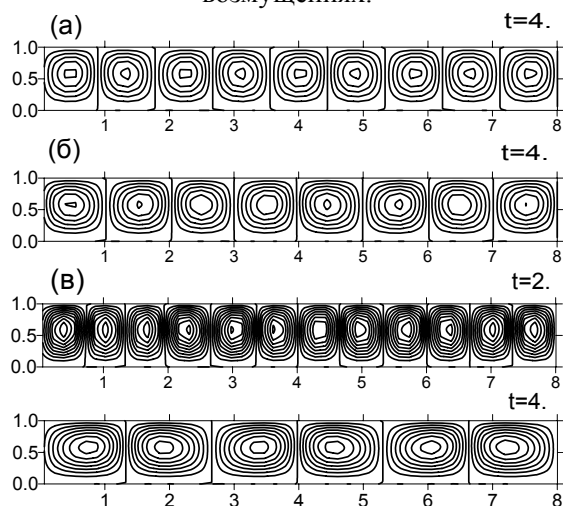


Рис.7

Цепочки конвективных вихрей при интенсивных начальных амплитудах: $n=9$ (а), $n=4$ (б), $n=12$ (в).

При задании интенсивных возмущений для 12-й гармоники она остается преобладающей до $t \approx 2$, а при $t \geq 3$ выживает 6-я гармоника (рис. 6 в), т.е. происходит удвоение размера вихрей (рис. 7 в). Таким образом, расчеты демонстрируют множественность возможных состояний (мультистабильность) цепочки конвективных вихрей.

Были проведены расчеты конвекции при малых начальных возмущениях в слое с условием фиксированной температуры на дне слоя $\vartheta = 0|_{z=0}$. В этом случае развитие конвекции приводит к установлению стационарного профиля средней температуры и стационарной картины конвективных вихрей (в отличие от затухающей конвекции для теплоизолированной нижней границы). Процесс отбора и размер вихрей в установившемся режиме также отличается от описанного выше для теплоизолированной нижней стенки. При $Pr=16,6$, $R=60140$ в результате конкуренции в установившемся режиме основную роль играет 3-я гармоника (рис.8) вместо 6-й (на рис.1), и установившееся число вихрей уменьшается до трех (рис.9) вместо шести (на рис.2). Таким образом, предельные размеры вихрей в данном случае значительно выше.

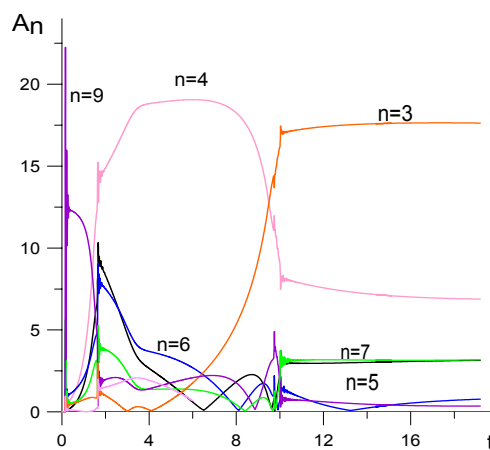


Рис.8

Зависимость амплитуд гармоник от времени при $\vartheta = 0|_{z=0}$, $R=60140$.

При $R=120000$ в установившемся режиме конвекции амплитуды мод флуктуируют во времени (рис.10). При этом размер вихря, как и в случае теплоизолированной нижней границы, растет с ростом числа Рэлея (см. рис. 11 и рис. 6).

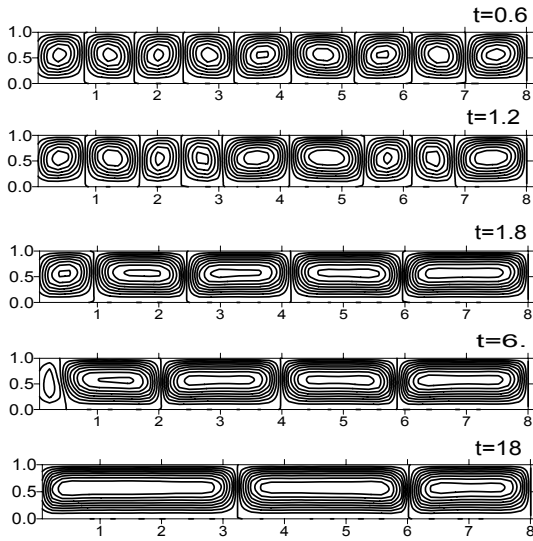


Рис.9

Цепочки конвективных вихрей при $\mathcal{G} = 0 \Big|_{z=0}$
и $R=60140$.

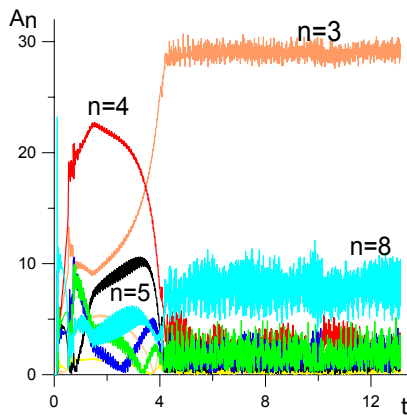


Рис.8

Зависимость амплитуд гармоник от времени
при $\mathcal{G} = 0 \Big|_{z=0}$, $R=120000$.

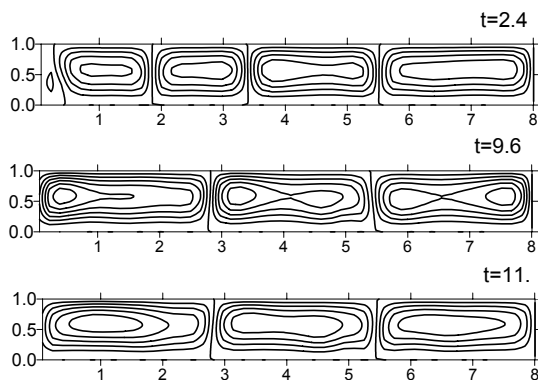


Рис.11

Цепочки конвективных вихрей при $\mathcal{G} = 0 \Big|_{z=0}$
и $R=120000$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, расчеты показали, что при больших числах Рэлея в жидком слое возникает квазистационарная система валов, которая характеризуется медленными колебаниями размеров валов и модуляцией их периода вдоль цепочки. Обнаружено, что система демонстрирует свойство мультистабильности, то есть масштаб валов, реализующихся в результате отбора, сильно зависит от начальных возмущений. Однако это происходит только при задании больших начальных амплитуд фурье-гармоник. Если начальные возмущения малы и случайны, то результат отбора определяется динамикой системы и не зависит от начальных амплитуд. В этом случае характерный размер конвективных валов, рассчитанный для $Ra=60140$, $Pr=16,6$, хорошо совпадает с результатами экспериментов с обдуванием слоя этанола [3]. Предпочтительное волновое число уменьшается с ростом числа Рэлея, что согласуется с экспериментальными данными, представленными в [1]. Таким образом, для рассмотренной системы получено корректное описание селекции конвективных валов уже в рамках двумерной модели. Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 04-05-64627).

ЛИТЕРАТУРА

- 1.А.В. Гетлинг. Конвекция Рэлея-Бенара. Структуры и динамика // Эдиториал УРСС, М., 1999, 345 с..
- 2.В.И.Полежаев, А.В.Бунэ, Н.А.Везуб и др. Математическое моделирование конвективного теплообмена на основе уравнений Навье-Стокса // Наука, М., 1987, 271 с.
- 3.В.П.Реутов, А.Б.Езерский, Г.В.Рыбушкина, В.В.Чернов. Конвективные структуры в тонком слое испаряющейся жидкости, обдуваемой воздушным потоком // Препринт ИПФ РАН № 680, Нижний Новгород, 2005, 34 с.

Galina Rybushkina is Senior Researcher of Institute of Applied Physics of RAS, Department of Nonlinear Dynamics. Her main scientific interests are Analytic Investigation and Numerical Simulation of Instabilities in Hydrodynamical Flows.